Desen tehnic si Infografică (2); Note de curs

- Curs 5 -

SCALAREA

Spre deosebire de transformările de translaţie şi rotație, transformarea de scalare are ca efect modificarea distanţelor şi poziţiei relative a punctelor unui obiect. Altfel spus, prin scalare este posibilă distorsionarea formei unui obiect. Există mai multe posibilități de scalare: (1) scalarea fără distorsionare, când după aplicarea transformării se obține un obiect care respectă condițiile de asemănare, (2) scalarea cu distorsionare, când după aplicarea transformării forma şi poziția relativă a punctelor nu rămân identice. În primul caz, se utilizează un factor de scară global (S_{gl}), iar în cel de-al doilea factori de scară diferiți (S_{Ox}, S_{Oy}, S_{Oz}) pentru fiecare direcție a axelor de coordonate.

Relațiile de transformare pentru un punct sunt descrise de ecuațiile:

$$\begin{cases} x_S = S_{gl} \cdot x \\ y_S = S_{gl} \cdot y \\ z_S = S_{gl} \cdot z \end{cases} \text{ sau matriceal } \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{gl} & 0 & 0 \\ 0 & S_{gl} & 0 \\ 0 & 0 & S_{gl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Pentru factori diferiți de scalare pe cele trei axe vom avea ecuațiile:

$$\begin{cases} x_S = S_{Ox} \cdot x \\ y_S = S_{Oy} \cdot y \\ z_S = S_{Ozl} \cdot z \end{cases} \text{ sau matriceal } \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & S_{Oyl} & 0 \\ 0 & 0 & S_{Oz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Iar prin compunere obținem:

$$\begin{cases} x_S = S_{gl} \cdot S_{Ox} \cdot x \\ y_S = S_{gl} \cdot S_{Oy} \cdot y \\ z_S = S_{gl} \cdot S_{Ozl} \cdot z \end{cases}$$

Scrise sub formă matriceală relațiile devin:

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{gl} \cdot S_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & S_{gl} \cdot S_{Oyl} & 0 \\ 0 & 0 & S_{gl} \cdot S_{Oz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = S_{gl} \cdot \begin{bmatrix} S_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & S_{Oyl} & 0 \\ 0 & 0 & S_{Oz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

SISTEME DE COORDONATE OMOGENE

Parcurgerea relațiilor corespunzătoare transformărilor geometrice tridimensionale primitive (translația, rotația, scalarea) sunt de fapt expresii matriceale care includ înmulțiri în cazul rotației şi a scalării şi adunare în cazul translației. Prezentarea prin relații analoge a acestor transformări este posibilă prin folosirea unui sistem de coordonate cu patru dimensiuni, numit *sistem de coordonate omogene*. Utilizarea acestui sistem de coordonate face posibilă şi compunerea transformărilor geometrice prin folosirea matricelor de transformare într-un mod unitar, conform relației:

$[C_{tr}] = [T_i]\cdot[C]$

În care $[C_{tr}]$ este matricea coordonatelor după transformare, $[T_i]$ este matricea de transformare (i arată faptul că există mai multe transformări), iar [C] este matricea coordonatelor înainte de transformare.

Considerăm un punct oarecare P, care are coordonatele x, y, z în sistemul de coordonate carteziene. Acest punct, în sistemul de coordonate omogene are coordonatele u, v, w, n, adică P(u, v, w, n). De obicei, coordonata omogenă n are valoarea 1 (aşa numita normă dimensională). Coordonatele carteziene se obţin din coordonale omogene cu relaţiile:

$$\begin{cases} x = u/n \\ y = v/n \\ z = w/n \end{cases}$$

Două puncte P_1, P_2 reprezentate în coordonate omogene sunt identice dacă există relațiile:

$u_1/n_1 = u_2/n_2$, $v_1/n_1 = v_2/n_2$, $w_1/n_1 = w_2/n_2$

Exprimarea în coordonate omogene face ca toate matricile de transformare să fie de dimensiune 4x4 şi toate transformările să poată fi exprimate ca produse de matrici. Dacă n = 1, relaţiile anterioare devin:

$$\begin{cases} x = u/1 \\ y = v/1 \\ z = w/1 \end{cases} \text{, adică } \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = w \end{cases}$$

Transformările geometrice în coordonate omogene

In coordonate omogene, transformările geometrice studiate până aici vor avea următoarele forme.

Translaţia. Relaţiile de transformare prin translaţie, în coordonate omogene, sub formă matriceală sunt următoarele:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotaţia. Transformările de rotaţie în raport cu axele sistemului de coordonate sunt definite, în coordonate omogene, de următoarele relații:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ axa } Ox$$

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ axa } Oy$$

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ axa } Oz$$

Iar coordonatele după transformarea rotația după cele trei axe, in ordinea ox, oy, oz se aflä prin:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cdot\cos\beta & \sin\gamma\cdot\cos\alpha+\cos\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha & \sin\gamma\cdot\sin\alpha-\cos\gamma\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha & 0 \\ -\sin\gamma\cdot\cos\beta & \cos\gamma\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma & \cos\gamma\cdot\sin\alpha+\sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & -\cos\beta\cdot\sin\alpha & \cos\beta\cdot\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scalarea. Transformarea de scalare în coordonate omogene are forma:

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{gl} \cdot S_{Ox} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{gl} \cdot S_{Oy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{gl} \cdot S_{Oz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Simetria. În cazul transformării de simetrie, dacă facem notațiile Oox = 1sau -1, Ooy =1sau -1, Ooz = 1sau -1, relațiile de transformare pot fi scrise ca:

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{Ox} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & O_{Oy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & O_{Oz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

De exemplu, în cazul simetriei faţă de planul oxy al sistemului de coordonate avem Oox = 1, Ooy =1, Ooz = -1, în cazul simetriei faţă de axa Ox avem Oox =1, Ooy = -1, Ooz = -1, iar în cazul simetriei în raport cu originea sistemului de coordonate Oox = -1, Ooy = -1, Ooz = -1.

Relația matriceală (1.51), în cazul transformărilor de mai sus devine:

$[Ctr] = [M_T]\cdot [C]$, $[C_{tr}] = [M_R]\cdot [C]$, $[C_{tr}] = [M_S]\cdot [C]$, $[C_{tr}] = [M_O]\cdot [C]$

Transformările geometrice complexe se pot defini prin compunerea transformărilor tridimensionale primitive. Relația de transformare complexă are forma generală:

$[C_{tr}] = [M_{tr\,3D}]\cdot[C]$, unde $[M_{tr\,3D}] = [M_T]\cdot[M_R]\cdot[M_S]\cdot[M_O]$