Desen tehnic și Infografică (2); Note de curs

- Curs 8 –

REPREZENTAREA DREPTELOR ŞI A SEGMENTELOR DE DREAPTĂ

Reprezentarea vectorială şi matriceală a ecuațiilor analitice permite utilizarea unui limbaj matematic unitar, atât pentru curbele bidimensionale, cât şi pentru cele tridimensionale.

Descrierea geometrică a curbelor ce definesc un obiect poate fi realizată în mai multe moduri. O curbă poate fi descrisă fie printr-o succesiune de puncte, definite prin coordonatele lor, fie folosind o ecuație analitică. Metoda indicării șirului succesiv de coordonate este neproductivă datorită consumului mare de resurse ale sistemului de calcul pentru trecerea de la o formă la alta.

Curbele pot fi descrise matematic de ecuații parametrice sau neparametrice. Ecuațiile neparametrice pot fi la rândul lor explicite sau implicite. Pentru o curbă neparametrică coordonatele y şi z ale unui punct de pe curbă sunt exprimate ca două funcții de o singură variabilă, care este chiar a treia coordonată, x.

Forma parametrică a unei curbe tridimensionale este descrisă de următoarea ecuație:

$$\boldsymbol{P(u)} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x(u) & y(u) & z(u) \end{bmatrix}^T, u_{\min} \le u \le u_{\max}$$

în care u este un parametru care are valori într-un interval limitat de valorile u_{min} şi u_{max}.

Ecuația parametrică implică faptul că pentru un punct oarecare al curbei coordonatele sale sunt componentele vectorului său de poziție. Relația parametrică este o relație generală care descrie corespondența dintre spațiul cartezian şi spațiul parametric. Este convenabil să se normalizeze variabila parametrică u astfel încât valorile sale să fie cuprinse în intervalul [0,1]. Sensul pozitiv de parcurgere a curbei este dat de creșterea valorilor parametrului u.

Parametrizarea ecuațiilor analitice ale dreptei se poate realiza în cel puțin două moduri prezentate în continuare. În primul caz parametrizarea utilizează relațiile vectoriale dintre vectorii de poziție a unor puncte caracteristice dreptei (Figura 1). Astfel, se consideră într-un sistem de referință cartezian Oxyz o dreaptă d şi două puncte $P_1(x_1,y_1,z_1)$ şi P_2 (x_2,y_2,z_2) ce aparțin dreptei, precum şi un punct oarecare P(x,y,z) ce aparține dreptei, situat între cele două puncte.

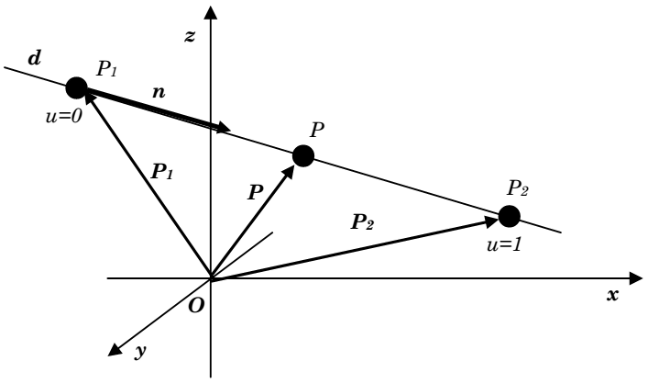

Figura 1. Reprezentarea dreptei definită de două puncte P_1, P_2.

Se definește un parametru u astfel încât are valoarea 0 corespunde punctului P1, iar valoarea 2 corespunde punctului P2. Se notează cu P1, P2 şi respectiv P vectorii de poziție ai celor trei puncte. Din relațiile geometrice dintre triunghiurile OP1P şi OP1 P2 şi vectoriale între vectorii de poziție ai punctelor considerate se poate scrie următoarea ecuație vectorială:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_1} + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P_1})$$

Vectorul ($P - P_1$) este proporțional cu vectorul (P2 − P1), astfel încât se poate scrie următoarea ecuație:

$$\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P_1} = u(\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1})$$

Din relația anterioară vectorul de poziție al punctului oarecare P poate fi scris ca mai jos:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_1} + u(\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}) \qquad 0 \le u \le 1$$

În formă scalară această ecuaţie vectorială poate fi scrisă ca:

$$\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1)\ , \quad 0 \le u \le 1 \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Vectorul tangent la dreapta d în punctul P1 este determinat prin relația vectorială:

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}$$

sau sub formă scalară:

$$\begin{cases} x' = x_2 - x_1 \\ y' = y_2 - y_1 \\ z' = z_2 - z_1 \end{cases}$$

Vectorul unitate al vectorului tangent P’ care determină direcția dreptei d (Figura 1) este definit prin relația vectorială:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}}{|\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}|} = \frac{\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}}{D} = \frac{x_2 - x_1}{D} \cdot \vec{i} + \frac{y_2 - y_1}{D} \cdot \vec{j} + \frac{z_2 - z_1}{D} \cdot \vec{k}$$

în care D este lungimea segmentului de dreaptă definit de punctele P_1 şi P_2 şi are valoarea egală cu modulul vectorului diferenţă $P_2 - P_1$:

$$D = \left|\boldsymbol{P_2} - \boldsymbol{P_1}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

A doua posibilitate de parametrizare a ecuației analitice a unei drepte este aceea care utilizează un punct P_1 şi un vector unitate n ce definește direcția şi sensul de parcurgere a dreptei (Figura 2). Această metodă este de bază pentru vizualizarea unei segment de dreaptă. Acest lucru este fundamentat de faptul că dacă se cunoaște punctul inițial, vectorul unitate şi un parametru cu care se poate determina distanța până la oricare alt punct de pe dreaptă, coordonatele celui de-al doilea punct se determină simplu, după metodologia descrisă în continuare.

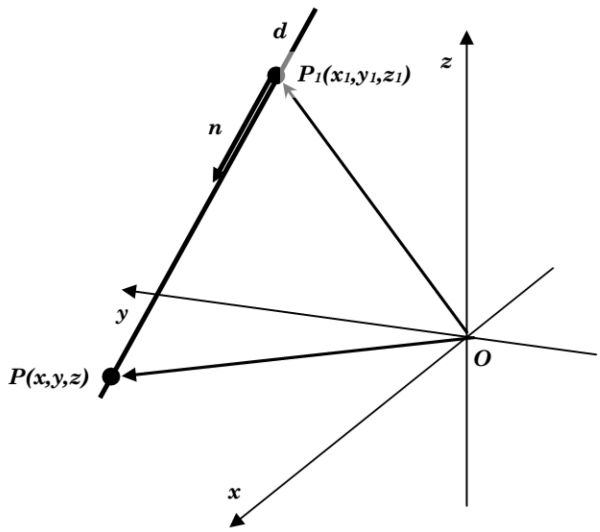

Figura 2. Dreapta este definită prin coordonatele unui punct şi vectorul unitate al dreptei.

Pentru a dezvolta ecuația parametrică a unei drepte în condițiile arătate mai sus se consideră un punct oarecare P(x,y,z), situat pe o dreaptă d o distanță D de P1(x1,y1,z1). Din triunghiul OPP1, ținând seama de faptul că OP şi OP1 sunt vectorii de poziția ai punctelor P şi P1, ecuația vectorială a dreptei d se deduce din relația vectorială:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_1} + D\boldsymbol{n} \qquad -\infty \le D \le \infty$$

în care D este modulul vectorului diferență:

$$D = \left|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P_1}\right|$$

În relațiile anterioare mărimea D are rolul de parametru, iar vectorul n este vectorul tangent în punctul P_1. Segmentul de dreaptă poate fi vizualizat după ce utilizatorul furnizează sistemului coordonatele punctului P_1, distanța D şi cosinusurile directoare ale vectorului unitate n, astfel încât pot fi evaluate cu relațiile de mai sus coordonatele celui de-al doilea punct ce definește segmentul de dreaptă, în condițiile în care parametrul are valoare 0 corespunzător punctului P_1 şi 1 corespunzător punctului P.

REPREZENTAREA PARAMETRICĂ A CERCURILOR

Ecuația parametrică a unui cerc are următoare formă, în concordanță cu reprezentarea grafică din Figura 3:

$$\begin{cases} x = x_c + R\cos u \\ y = y_c + R\sin u, \quad 0 \le u \le 2\pi \\ z = z_c \end{cases}$$

presupunând că planul cercului este planul Oxy al sistemului de coordonate pentru o mai simplă manipulare a relațiilor matematice. În sistemul de ecuații de mai sus unghiul dintre raza cercului corespunzătoare unui punct P, arbitrar ales, şi o dreaptă paralelă cu axa Ox, notat cu u are rolul de parametru.

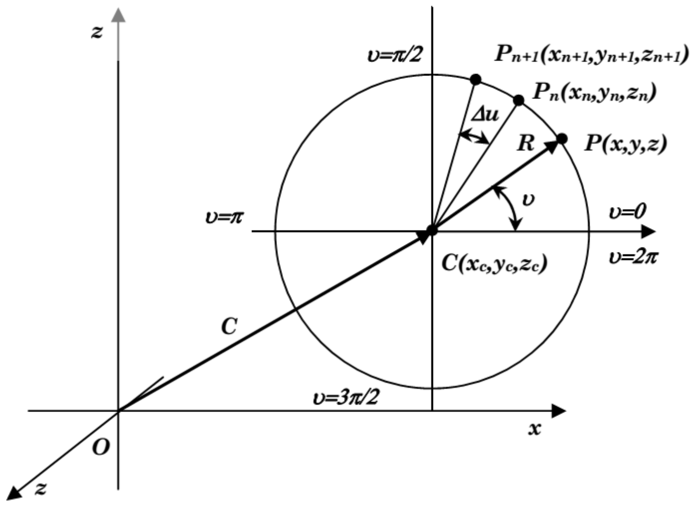

Figura 3. Reprezentarea parametrică a unui cerc cunoscând raza şi centrul cercului.

Se observă că parametrizarea cercului este asemănătoare cu o transformare a sistemului de coordonate, urmată de o transformare a sistemului de referință printr-o transformare geometrică de translație.

Reprezentarea parametrică a cercului oferă posibilități multiple pentru implementarea unor algoritmi de calcul şi vizualizare care solicită într-o mai mică măsură resursele sistemului. Cercul (şi nu numai) este vizualizat ca o linie poligonală, coordonatele vârfurilor poligonului fiind evaluate în mod secvențial pentru valori consecutive ale parametrului u. Din păcate, pentru a obține o imagine cât mai fidelă a cercului, numărul punctelor pentru care trebuie calculate şi stocate coordonatele crește foarte mult, astfel încât necesarul de resurse sistem crește foarte mult. Pentru a evita o asemenea problemă de implementare a algoritmului de calcul, se utilizează un increment constant Δu pentru parametrul u şi se calculează coordonatele a două puncte succesive. Fie $P_n(x_n,y_n,z_n)$, $P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})$ două puncte consecutive care aparțin cercului, valorile parametrului corespunzătoare celor două puncte fiind u, respectiv $u+\Delta u$. Ecuațiile parametrice corespunzătoare celor două puncte sunt următoarele:

- pentru punctul P_n:

$$\begin{cases} x_n = x_c + R\cos u \\ y_n = y_c + R\sin u \\ z_n = z \end{cases}$$

- pentru punctul P_{n+1}:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_c + R\cos(u+\Delta u) \\ y_{n+1} = y_c + R\sin(u+\Delta u) \\ z_{n+1} = z_n = z \end{cases}$$

Se obțin următoarele relații între coordonatele carteziene ale celor două puncte consecutive:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_c + \left(x_n - x_c\right)\cos\Delta u - \left(y_n - y_c\right)\sin\Delta u \\ y_{n+1} = y_c + \left(y_n - y_c\right)\cos\Delta u + \left(x_n - x_c\right)\sin\Delta u \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

Relațiile fac posibil calculul coordonatelor unui număr finit de puncte ale unui cerc, cunoscând doar coordonatele centrului cercului şi incrementul unghiular Δu. Funcțiile trigonometrice trebuie evaluate o singură dată, ceea ce reduce în mod semnificativ necesarul de resurse ale sistemului pentru calculul coordonatelor punctelor.

Arcurile de cerc, care necesită, pe lângă indicarea centrului şi razei, unghiurile de început şi sfârșit. Ecuația parametrică a unui arc de cerc poate fi scrisă în următoarea formă:

$$\begin{cases} x = x_c + R\cos u \\ y = y_c + R\sin u,\ u_i \le u \le u_s \\ z = z_c \end{cases}$$

în care $u_î$ şi u_s sunt unghiurile de început şi de sfârșit ale arcului respectiv. O atenție deosebită trebuie acordată sensului pozitiv de creștere a unghiurilor, întrucât dacă nu există implementată o regulă de generare şi vizualizare a arcului, se poate greși deoarece exista două posibilități, sens trigonometric si invers trigonometric.